ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑ: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ή $a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$

Η πιο καλά ορισμένη και συνήθης περίπτωση που χρησιμοποιούμε από τις 2 παραπάνω είναι η 2η

x_0: κέντρο της δυναμοσειράς

R: ακτίνα σύγκλισης

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ για } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 0$$

$$R = +\infty, \text{ για } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

$$R = 0, \text{ για } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$$

Η $\sum a_n (x-x_n)^n$ θα συγκλίνει για κάθε $x \in (x_0-R, x_0+R)$ και λέγεται διαστ. σύγκλισης

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Εάν το $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbb{R}$ τότε το $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = l$

Εάν $f: I \to \mathbb{R}$, (I: διάστημα) έχει παράγωγο κ-τάξης για κάθε $v \in \mathbb{N}$ στο I και $\exists r > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{r^n}{n!} \sup_{x\in I} |f^{(n)}(x)| \right| = 0,$$ τότε η f αναπαρίσταται σε δυναμοσειρά στο (x_0-r, x_0+r)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Λέμε ότι η f αναλυτική (στο x_0 ή γύρω από το x_0) εάν $\exists r > 0$: f να αναπαρίσταται σε δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισης (x_0-r, x_0+r)

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Εάν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, $R_1 > 0$ και $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n$, $R_2 > 0$

Τότε $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n+d_n)(x-x_0)^n$, $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ καιείσ

Τότε $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, όπου $a_n = \sum_{n=0} c_n \cdot d_{n-r}$

πχ $a_4 = c_0 d_4 + c_1 d_3 + c_2 d_2 + c_3 d_1 + c_4 d_0$

πχ

Εστω $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ και $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

μπορούμε για τη συνάρτηση $e^x \cdot \sin x$ να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα.

Εστω η διαφορική εξίσωση

(Ε) $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, $\alpha_1, \alpha_0, \alpha_2$: $x_0 \in I$

x_0: ομαλό σημείο $\rightarrow$ $\alpha_2(x_0) \neq 0$

$\rightarrow$ $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}$: ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΣΤΟ x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (σελ. 236)

Ας είναι x_0 ένα ομαλό σημείο της (Ε) και $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(x) = P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (x-x_0)^n$, $|x-x_0| < R_1$, $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n$

με $q(x) = \frac{\alpha_0}{\alpha_2}(x)$, $|x-x_0| < R_2$. Αν $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ τότε θα υπάρχουν c_n $(n \geq 2)$ έτσι ώστε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, να έχει θετική ακτίνα σύγκλισης $r \geq \min\{R_1, R_2\}$ και η συνάρτηση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ να είναι λύση της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(x_0) = c_0$ και $y'(x_0) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Εστω η εξίσωση (Airy): $y'' - xy = 0$, $x_0 = 0$

$\alpha_2(x) = 1$, $\alpha_1(x) = 0$ και $\alpha_0(x) = -x$

$\alpha_2(0) \neq 0$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(x) = 0$ και $\frac{\alpha_0}{\alpha_2}(x) = \frac{-x}{1} = -x$

Τότε το $x_0 = 0$ ομαλό σημείο και αντίστοιχως οι ακτίνες είναι $R_1 = +\infty$ και $R_2 = +\infty$

Ας είναι $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ είναι $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \, x^{n-1}$

$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \, n(n-1) x^{n-2}$, Άρα, αντικαθιστώντας στην εξίσωση, έχουμε

$\sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2-3}^{\infty} c_{n+3}(n+3)(n+2)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+3}(n+3)(n+2)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+3}(n+3)(n+2)\cdot x^{n+1} - c_n \cdot x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+3}\cdot(n+3)(n+2) - c_n\right)x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2 = 0 \quad \text{και} \quad c_{n+3}(n+3)(n+2) - c_n = 0, \; n \geq 0$$

$$\Rightarrow c_2 = 0 \quad \text{και} \quad c_{n+3} = \frac{c_n}{(n+2)(n+3)}, \; n \geq 0$$ (Αναδρομική ακολουθία)

$1^{η}$ περ) $n = 3k \ldots$

$2^{η}$ περ) $n = 3k+1 \ldots$

$3^{η}$ περ) $n = 3k+2 \ldots$

Ας πάρουμε την $1^{η}$ περ:

$\begin{cases} n = 3k \geq 0 \\ k \geq 0 \end{cases}$ τότε $c_{3k+3} = \dfrac{c_{3k}}{(3k+2)(3k+3)}, \; k \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_{3(k+1)} = \frac{c_{3k}}{(3k+2)(3k+3)}, \; k \geq 0$$

⊛ όπου το $3(k+1)$ είναι το επόμενο από τα πολλαπλάσια του $3k$ πράγμα το οποίο δεν το είχαμε προηγουμένως.

Για $k = 0, 1, \ldots, n$ έχουμε

$k=0$: $\cancel{c_3} = \dfrac{c_0}{2\cdot 3}$, $k=1$: $\cancel{c_6} = \dfrac{\cancel{c_3}}{5\cdot 6}$,

$k=2$: $c_9 = \dfrac{\cancel{c_6}}{8\cdot 9}$ $\ldots$, $k = k-1$: $c_{3k} = \dfrac{c_{3(k-1)}}{(3k-1)\cdot 3k}$

Ένα πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τότε

$$c_{3k} = \frac{c_0}{2\cdot 5\cdot 8 \cdots (3k-1)\cdot 3\cdot 6\cdot 9 \cdots 3k}, \; k \geq 1 \quad (\text{διότι } k-1 \geq 0)$$

πολ/ζω και διαιρώ με τους όρους

$$C_{3k} = \frac{C_0 \cdot (4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3k-2))}{(3k)!} \quad , \; k \geq 1$$

ή θα μπορούσαμε στον προηγούμενο τύπο του C_{3k} να παρατηρήσουμε ότι, $3 = 3 \cdot 1$, $6 = 3 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3 \ldots$

άρα αφού $3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3k = (3 \cdot 1)(3 \cdot 2)(3 \cdot 3) \cdots (3 \cdot k) =$

$= 3^k \cdot k!$

• Ας πάρουμε τη 2η περ.

$n = 3k+1$, $k \geq 0$

$$c_{3k+4} = \frac{c_{3k+1}}{(3k+4)(3k+5)} , \ k \geq 0$$

$$c_{3(k+1)+1} = \frac{c_{3k+1}}{(3k+4)(3k+5)}$$

Για $k=0$: $\cancel{c_4} = \frac{c_1}{4 \cdot 5}$, Για $k=1$ $\cancel{c_7} = \frac{\cancel{c_4}}{7 \cdot 8}$, Για $k=2$ $c_{11} = \frac{\cancel{c_7}}{10 \cdot 11}$, …, $k = 3k+4$ $c_{3k+4} = \frac{\cancel{c_{3k+1}}}{(3k+4)(3k+5)}$

Και τα πολλ/ζω κατά μέλη;

$$c_{3k+4} = \frac{c_1}{(4 \cdot 7 \cdots (3k+4)) \cdot (5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3k+5))}$$

$k = n-1$

$$c_{3n+1} = \frac{c_1}{(4 \cdot 7 \cdots (3n+1))(5 \cdot 8 \cdots (3n+2))} \quad n \geq 1$$

• Ας πάρουμε $n = 3k+2$, $k \geq 0$

$$c_{3k+5} = \frac{c_{3k+2}}{(3k+5)(3k+4)} , \ k \geq 0$$

Για $k=0$ $c_5 = \frac{\overset{=0}{c_2}}{5 \cdot 4} \Rightarrow c_5 = 0$, Για $k=1$ $c_7 = \frac{\overset{=0}{c_4}}{8 \cdot 7} = 0$ … $k = 3k+5$ $c_{3k+5} = 0$

Άρα, $c_{3n+2} = 0$, $n \geq 0$

$$y(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{3k} \cdot x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{3k+1} \cdot x^{3k+1} +$$

$$+ \cancel{\sum_{k=0}^{\infty} c_{3k+2} \cdot x^{3k+2}} \to 0$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k} c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} c_1 \cdot x^{3k+1} =$$

$$= c_0 \underbrace{\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n} \right)}_{y_0(x)} + c_1 \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1} \right)}_{y_1(x).}$$

$$= c_0 \cdot y_0(x) + c_1 \cdot y_1(x)$$

όπου $y(0) = c_0$ και $y'(0) = c_1$

για $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ $\to$ $y_0(x)$ . . .

για $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ $\to$ $y_1(x)$ . . .

και παίρνουμε την ορίζουσα Wronski

για $\{y_0, y_1\}$ ΒΣΛ.